

## نظریه میکروسکوپی مغناطیس

گشتاورهای مولکولی تمایل دارند خود را با جهت میدان اعمال شده همسو کنند، درست نظیر مدار جریان که تمایل دارد خود را با میدان همسو کند. عرضه می‌کنند. مانند مورد مولکولهای قطبی در یک میدان الکتریکی، این پاسخ به طور تقریبی به وسیله تابع لانژون توصیف می‌شود. جز در نزدیکی صفر مطلق، پذیرفتاری پارامغناطیسی حاصل برابر است با:

$$\chi_m = \frac{N m_o^2 \mu_o}{3 k T} \quad (3-10)$$

### نظریه فرومغناطیس

برای درک فرومغناطیس، فرض می‌شود:

$$H_m = H + \gamma M \quad (4-10)$$

که در آن  $\gamma >> 1$ . (این قسمت از یک انرژی مکانیک کوانتومی ناشی می‌شود، که به سمتگیری نسبی گشتاورهای مغناطیسی اسپینی بستگی دارد، این انرژی به انرژی مغناطیسی  $m_o \cdot H$  اضافه می‌شود و بنابراین می‌توان آن را برحسب یک میدان مغناطیسی مؤثر توصیف کرد، گرچه منشأ آن الکتروستاتیکی است). در این صورت تا وقتی که  $T$  کمتر از دمای کوری باشد، جوابی با  $H=0, M \neq 0$  در این معادله و معادله لانژون صدق می‌کند.

حتی در دمایی پایین‌تر از دمای کوری، یک قطعه فرومغناطیس با ابعاد ماکروسکوپی ممکن است به خاطر ساختار حوزه‌های اش گشتاور مغناطیسی کل نداشته باشد.

### حوزه‌های فرومغناطیسی

جنبه‌های ماکروسکوپی مغناطش در مواد فرومغناطیس به تغییرات در پیکربندی حوزه‌ها مربوط می‌شوند. افزایش مغناطش ناشی از تأثیر یک میدان خارجی با دو فرایند مستقل حاصل می‌شود: افزایش حجم حوزه‌هایی که سمتگیری آنها با میدان مطابقت دارد در مقابل کاهش حجم حوزه‌هایی که سمتگیری آنها مطابق با جهت میدان نیست یا با چرخش مغناطش حوزه به طرف جهت میدان. در میدان‌های خارجی ضعیف مغناطش معمولاً با حرکت دیواره حوزه تغییر می‌کند. در مواد خالصی که فقط شامل یک فازند. در ناحیه

### میدان مولکولی درون ماده

مغناطش ماکروسکوپی یک ماده مغناطیسی از گشتاور دو قطبی مغناطیسی مولکولی (یا مؤلفه آن) ناشی می‌شود، و این گشتاور در پاسخ به میدان موضعی در مکان مولکول، یعنی میدان مولکولی  $H_m$ ، بوجود می‌آید. میدان مولکولی به میدان خارجی  $H$ ، و نیز به خود مغناطش بستگی دارد. سهم مربوط به مغناطش، که از میدانهای مغناطیسی دو قطبی همه مولکولهای دیگر ناشی می‌شود، و در قیاس با مورد دی‌الکتریک نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$H_m = H + \frac{1}{3} M \quad (1-10)$$

برای اکثر موارد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی، عبارت  $\frac{1}{3} M = \frac{1}{3} \chi_m H$  فوق‌العاده کوچک و قابل چشم‌پوشی است، ولی برای اجسام فرومغناطیس این جمله بسیار با اهمیت است.

### منشأ دیامغناطیس

همه مولکولها در اثر تغییر شکل توزیع جریان الکترونی در یک میدان مغناطیسی گشتاور دو قطبی مغناطیسی القایی پیدا می‌کنند. پاسخ همیشه طوری است که میدان خارجی را تضعیف می‌کند، یعنی سهم (دیامغناطیسی) مربوط به پذیرفتاری همیشه منفی است. با یک تقریب خطی به پذیرفتاری دیامغناطیسی ثابت می‌رسیم:

$$\chi_m = -\frac{Ne^2 \mu_o}{4 m_e} \sum_i R_i^2 \quad (2-10)$$

خاصیت دیامغناطیس ظاهراً در تمام انواع ماده یافت می‌شود، ولی اثر آن غالباً به وسیله آثار قوی‌تر پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی که می‌توانند با این خاصیت همراه باشند، مخفی می‌شود. خاصیت دیامغناطیس خصوصاً در موادی بارز است که کلاً از اتمها یا یونهای با پوسته‌های بسته الکترونی تشکیل شده باشند، زیرا در این مورد تمام تأثیرات پارامغناطیسی حذف می‌شوند.

### منشأ پارامغناطیس

مولکولهایی که گشتاور دو قطبی دائمی  $m_o$  دارند، یک پاسخ اضافی مربوط به سمتگیری (پارامغناطیس نتیجه این امر است که این



$$\vec{\mu}_L = -\frac{eV}{2\pi r} (\pi r^2) \hat{k} = -\frac{eVr}{2} \hat{k} \quad (1)$$

و اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون برابر است با:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{V} = r m V \hat{k} = L_z \hat{k} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \vec{\mu}_L = -\frac{eL_z}{2m_e} \hat{k}$$

با توجه به مکانیک کوانتومی می‌دانیم که  $L_z = \hbar m_L$  است، اگر  $m_L = 1$  را در نظر بگیریم، بنابراین:

$$\vec{\mu}_L = -\frac{eL_z}{2m_e} \hat{k} = -\frac{e\hbar}{2m_e} \hat{k} = -\frac{e\hbar}{2\pi m_e} \hat{k} \rightarrow$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2\pi m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ (A.m}^2\text{)}$$

۱۰-۲- مگنتون بور واحد طبیعی اندازه‌گیری گشتاور مغناطیسی اتم است. گشتاور مغناطیسی در هر اتم را برحسب مگنتون بور برای آهن، نیکل، و کبالت در شرایط مغناطش اشباع محاسبه کنید. از داده‌های جدول ۲-۹ استفاده کنید.

حل: اگر گشتاور مغناطیسی هر اتم را  $m_o$  و تعداد اتمها در واحد حجم را  $N$ ، مغناطش اشباع را  $\mu_s$  در نظر بگیریم، بنابراین:

$$\mu_s = N m_o, \quad N = N_o \frac{\rho}{M}$$

با جایگذاری مقادیر عددی برای آهن داریم:

$$N = N_o \frac{\rho}{M} = 6.02 \times 10^{23} \left( \frac{\text{atom}}{\text{mol}} \right) \frac{7.8 \times 10^3 \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)}{56 \times 10^{-3} \left( \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \right)} = 8.28 \times 10^{28} \left( \frac{\text{atom}}{\text{m}^3} \right) \quad (1)$$

$$\mu_o M_s = 2.15 \text{ (T)} \quad (2)$$

(۲-۹)

$$(1), (2) \rightarrow m_o = \frac{M_s}{N} = \frac{\mu_o M_s}{\mu_o N} =$$

$$\frac{2.15}{6.02 \times 10^{23} \times 8.28 \times 10^{28}} = 4.2 \times 10^{-23} \text{ (A.m}^2\text{)}$$

$$m_o = \frac{4.2 \times 10^{-23}}{9.27 \times 10^{-24}} = 4.5 \rightarrow (m_o)_{Fe} = 4.5 \mu_B$$

۱۰-۳- شدت نسبی برهم‌کنش بین دو دوقطبی مغناطیسی را در مقایسه با برهم‌کنش بین دو دوقطبی الکتریکی محاسبه کنید. به طور مشخص گشتاور نیروی وارد بر یک دوقطبی از طرف دوقطبی دیگر را حساب کنید، وقتی که آن دو عمود بر یکدیگر و به فاصله یک آنگستروم از یکدیگر قرار گرفته باشند؛ فرض کنید هر دوقطبی مغناطیسی مساوی ۱ مگنتون بور، و هر دوقطبی الکتریکی مساوی از  $e \times 10^{-10}$  آنگسترم باشد. این محاسبه نشان می‌دهد که مقدار

میدان ضعیف حرکت دیواره تا حدود زیادی برگشت‌پذیر است. در میدان‌های قوی مغناطیسی با حرکت برگشت‌ناپذیر دیواره و سرانجام با چرخش حوزه انجام می‌شود. در این حالتها وقتی میدان مغناطیسی خارجی حذف شود، ماده به صورت مغناطیده باقی می‌ماند.

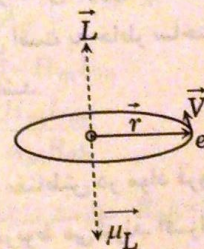
### فریتها

برطبق نظریه فرومغناطیس هایزنبرگ، تغییر در اسپین اتمهای مجاور از حالت همسویی موازی به حالت همسویی پادموازی، تغییری در انرژی الکتروستاتیکی به همراه دارد. اگر با این تغییر انرژی اتمها ایجاد همسویی موازی ارجح باشد، و در عین حال اندازه تغییر کافی باشد، ماده متشکل از چنین اتمهای فرومغناطیس است. اگر با این تغییر انرژی ایجاد همسویی پادموازی ارجح باشد، باز هم امکان ایجاد یک ساختار اسپینی منظم وجود دارد، ولی در این مورد در سرتاسر بلور، جهت اسپینها به طور متناوب از اتمی به اتم دیگر تغییر می‌کند. هر ساختار اسپینی منظم با برآیند گشتاور مغناطیسی کل صفر را پادفرومغناطیس می‌نامند. ساختار اسپینی منظم شامل هر دو مؤلفه اسپین بالا و اسپین پایین که گشتاور مغناطیسی کل آن در یکی از این جهات مخالف صفر باشد، فری مغناطیس یا به عبارت ساده‌تر فریت نامید.

## مسائل فصل دهم

۱۰-۱- مگنتون بور به صورت گشتاور مغناطیسی الکترون در حال گردش در "مدار کلاسیک بور" در اتم هیدروژن، تعریف می‌شود. این مدار، مدار دایروی است که با طولی دقیقاً برابر یک طول موج دو بروی که شتاب جذب به مرکز حرکت دایره‌ای آن به وسیله نیروی جاذبه کولنی تأمین می‌شود. نشان دهید که یک مگنتون بور برابر است با  $\frac{eh}{4\pi m_e}$  که در آن  $m_e$  جرم الکترون و  $\hbar$  ثابت پلانک است.

حل:



$$\left. \begin{aligned} \vec{\mu}_L &= -I \vec{A} \hat{k}, \quad I = ev, \quad A = \pi r^2 \\ V &= rw = r 2\pi v \rightarrow v = \frac{V}{2\pi r} \end{aligned} \right\}$$



$$= (\lambda \times (4 \times 10^{-11})^2) \approx 3 \times 10^{-9}$$

۵-۱۰- مغناطش یک جسم فرومغناطیس در دمای کوری به صفر می‌رسد. در شکل ۱۰-۲ دمای کوری با خط راستی که در مبدأ مختصات بر تابع لانژون مماس است نمایش داده می‌شود. با استفاده از مقدار تجربی دمای کوری برای آهن،  $\gamma$  آهن را تعیین کنید.

حل:

$$M = N m_o \left[ \coth y - \frac{1}{y} \right] \quad \text{رابطه (۱۰-۱۹)}$$

با بسط  $\coth y$  برای  $y$  ها کوچک (مسئله ۵-۴) داریم:

$$M \approx N m_o \left[ \frac{1}{3} y + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} \right] = \frac{N m_o}{3} y \quad (۱)$$

$$M = \frac{k T y}{\gamma \mu_o m_o} \quad \text{رابطه (۱۰-۲۰)}$$

در دمای کوری  $T_c$ ، این دو خط روی هم می‌افتند، بنابراین:

$$(۱), (۲) \rightarrow \frac{N m_o}{3} = \frac{k T_c}{\gamma \mu_o m_o} \rightarrow \gamma = \frac{3 k T_c}{N \mu_o m_o} \rightarrow$$

$$M_s = N m_o \quad \text{مغناطش اشباع}$$

$$\gamma = \frac{3 k T_c N \mu_o}{\mu_o^2 M_s^2} \quad (۳)$$

$$(۲-۹) \quad (\mu_o M_s)_{Fe} = 2.15 \quad T$$

$$(T_c)_{Fe} = 1043 \quad (K)$$

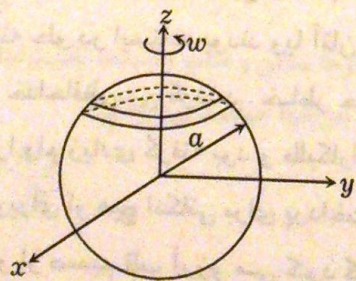
$$(۲-۱۰) \quad \text{مسئله: } (N)_{Fe} = 8 / 4 \times 10^{28} \quad \left( \frac{\text{atom}}{m^3} \right)$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۳) داریم:

$$\gamma = \frac{3 (1/38 \times 10^{-23}) (1043) (8 / 4 \times 10^{28}) (4\pi \times 10^{-7})}{(2.15)^2} \approx 986$$

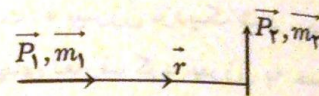
۱۰-۶- طبق تعریف نسبت زیرومغناطیسی یک توزیع جریان عبارت است از نسبت گشتاور مغناطیسی به اندازه حرکت زاویه‌ای آن. نسبت زیرومغناطیسی کره‌ای به جرم  $M$  و بار  $Q$  را محاسبه کنید. فرض کنید کره با سرعت زاویه‌ای  $w$  حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد، می‌چرخد و جرم آن به طور یکنواخت در سراسر حجم، و بار الکتریکی آن به طور یکنواخت در سطح توزیع شده است.

حل:



برهم کنش مغناطیسی بنیادی در ماده چندین مرتبه بزرگی از برهم کنش الکتریکی کوچکتر است.

حل:



گشتاور نیروی وارد بر دو قطبی مغناطیسی (۲) از طرف دو قطبی مغناطیسی (۱) برابر است با:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_2 &= \vec{m}_2 \times \vec{B}_1 \\ \vec{B}_1 &= \frac{\mu_o}{4\pi} \left[ \frac{3\vec{r} \cdot \vec{m}_1}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}_1}{r^3} \right] \\ \rightarrow \vec{\tau}_2 &= \frac{\mu_o k}{4\pi} \left[ \frac{3m_2 m_1}{r^3} - \frac{m_2 m_1}{r^3} \right] = \frac{\mu_o k}{4\pi} \left[ \frac{2m_1 m_2}{r^3} \right] \quad (۱) \end{aligned}$$

گشتاور نیروی وارد بر دو قطبی الکتریکی (۲) از طرف دو قطبی الکتریکی (۱) برابر است با:

$$\vec{\tau}_2 = \vec{P}_2 \times \vec{E}_1 = \frac{k}{4\pi \epsilon_o} \left[ \frac{2P_1 P_2}{r^3} \right] \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \rightarrow \frac{\tau_m}{\tau_E} = \epsilon_o \mu_o \frac{m_1 m_2}{P_1 P_2} = \frac{m_1 m_2}{C^2 P_1 P_2}$$

$$= \frac{\mu_B^2}{C^2 e^2 (0.1 \times 10^{-10})^2} \approx 3.7 \times 10^{-4}$$

۱۰-۴- پذیرفتاری دیامغناطیسی نئون را در دما و فشار متعارف (صفر درجه سلسیوس و یک جو فشار) محاسبه کنید. فرض کنید فقط هشت الکترون خارجی در هر اتم در این امر سهیم باشند، و شعاع متوسط مدار این الکترون‌ها  $R = 4/0 \times 10^{-9} \text{ cm}$  باشد.

حل:

$$\chi_m = \frac{-N e^2 \mu_o}{4 m_e} \sum_i R_i^2 \quad \text{پذیرفتاری دیامغناطیسی}$$

که در آن جمع‌بندی روی الکترون‌های یک مولکول یا اتم است، برای بدست آوردن  $N$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$PV = n R \Gamma \Rightarrow P = \frac{N'}{V} k \Gamma = N k \Gamma \Rightarrow N = \frac{P}{k \Gamma}$$

$$N = \frac{1.05 \text{ (pa)}}{(1/38 \times 10^{-23}) \times 2773 \text{ (K)}} = 2.65 \times 10^{25} \left( \frac{\text{atom}}{m^3} \right)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \chi_m &= -\frac{N e^2 \mu_o}{4 m_e} \sum_i R_i^2 = -\frac{N e^2 \mu_o}{4 m_e} (\lambda R^2) \\ &= -\frac{(2.65 \times 10^{25}) \times (1/6 \times 10^{-19})^2 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4 \times (9/1 \times 10^{-31})} \end{aligned}$$



$$\frac{m}{L} = \text{نسبت ژیر و مغناطیس}$$

با توجه به مسئله (۸-۲۸)، مقدار گشتاور مغناطیسی توزیع بار سطحی روی

$$\text{کره چرخان با چگالی } \sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} \text{ برابر است با:}$$

$$m = \frac{4\pi}{3} \sigma w a^3 = \frac{Q w a^3}{3} \quad (۱)$$

برای محاسبه اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m \vec{V} \rightarrow d\vec{L} = \vec{r} \times dm \vec{V}$$

$$dm = \rho dV, \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3M}{4\pi a^3}$$

$$\vec{r} \times \vec{V} = \vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] = r \hat{r} \times [\omega \hat{k} \times r \hat{r}] = \omega \hat{\phi}$$

$$r^2 \omega \hat{r} \times [\hat{k} \times \hat{r}] = r^2 \omega \sin \theta \hat{\phi}$$

با استفاده از تجزیه بردارهای یک‌قطبی کروی در دستگاه دکارتی داریم:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

$$\hat{r} \times \hat{\phi} = \sin \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \hat{k} - \cos \theta (\sin \varphi \hat{j} + \cos \varphi \hat{i})$$

$$\vec{L} = \frac{3M}{4\pi a^3} \omega \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta (\sin \theta \hat{k}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr + \dots$$

$$= \frac{3M}{4\pi a^3} \omega \left( \frac{4\pi a^5}{5} \right) \hat{k} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{3M a^3 \omega}{5} \hat{k} \quad (۲)$$

به صورت زیر می‌توان به همین نتیجه دست یافت:

$$L_z = I \omega$$

$$I = \frac{3}{5} M a^2 \quad (\text{گشتاور لختی کره نسبت به یک قطر آن})$$

$$(۱), (۲) \rightarrow \frac{m}{L} = \frac{5Q}{6M}$$



## خواص الکترومغناطیسی ابر رسانا

فرض که جریانهای ابررسانایی مناسبی در سطح ابر رسانا جریان دارند بر آورده می شوند. این دو فرمولبندی با یکدیگر معادل اند. ولی در یک مسئله مفروض تنها یکی از آن دو باید انتخاب و دنبال شود.

### مسائل فصل پانزدهم

۱۵-۱- استوانه‌ای ابررسانای بی نهایت به شعاع  $a$  را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی عرضی قرار گرفته است. در فواصل دور از استوانه میدان یکنواخت و اندازه‌اش  $B_0$  است. (الف) میدانها را در داخل و در خارج استوانه و (ب) چگالی جریان را در داخل استوانه و روی سطح آن محاسبه کنید. فرض کنید که خواص ابررسانایی توسط خاصیت دیامغناطیسی کامل و رسانندگی کامل توصیف می شوند. دو فرمولبندی معادل را مقایسه کنید.

**حل:** محور استوانه را در راستای محور  $Z$  ها و میدان اولیه  $\vec{B}_0$  را در راستای محور  $x$  ها در نظر می گیریم. برای خارج و داخل استوانه به ترتیب داریم:

$$r \rightarrow \infty \quad \vec{B} = B_0 \hat{i}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi_{out} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_{out}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_{in}$$

در داخل استوانه ابر رسانا هیچگونه قطب مغناطیسی وجود ندارد، بنابراین:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_{in} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi_{in} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

با توجه به تقارن مسئله  $\phi$  به  $Z$  بستگی ندارد، بنابراین

$$\nabla^2 \phi^*(r, \theta) = 0 \Rightarrow \phi^*(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

ابر رساناها رده نسبتاً بزرگی از مواد را تشکیل می دهند که در دماهای کم، معمولاً کمتر از  $20K$  گذار فازی به حالت ابر رسانایی دارند. این گذار علاوه بر بستگی به دما به میدان مغناطیسی نیز بستگی دارد، و در میدانهای شدیدتر از میدان بحرانی  $H_C$  ماده به حالت معمولی بر می گردد. به طور ایده آل

$$H_C = H_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1-15)$$

رفتار الکتریکی و مغناطیسی در حالت ابر رسانایی را به ساده ترین وجه می توان توسط معادلات ساختمندی  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ,  $\vec{J} = g \vec{E}$  توصیف کرد که در آنها پارامترهای مواد، مقادیر فرین زیر را دارند

$$g = 0, \quad \chi_m = -1 \quad (\mu_0 = 0) \quad (2-15)$$

این مقادیر، رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل را نشان می دهند. خاصیت دیامغناطیسی کامل ایجاب می کند که در درون ابر رسانا چگالی شار  $\vec{B}$  و چگالی جریان  $\vec{J}$  هر دو صفر باشند و جریانهای ابر رسانایی در سطح جاری باشند. معادلات لندن توصیف دقیق تری به دست می دهند در این معادلات، معادلات خطی ساختمندی با معادلات دیفرانسیل زیر جایگزین می شوند

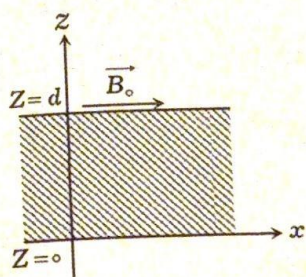
$$\mu_0 \vec{J} = \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \vec{E}, \quad \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} = - \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \vec{B}$$

از این معادلات، همراه با معادلات ماکسول در خلأ، چنین نتیجه می شود که چگالی شار و چگالی جریان در درون ابر رسانا به جای آنکه به طور ناگهانی به صفر نزول کنند، بافاصله از سطح به طور نمایی با عمق نفوذ  $\lambda$  کاهش می یابند.

برای مسائلی که در آنها ابر رسانا در میدان مغناطیسی واقع است، فرمولبندی ساده  $\mu = 0$ ,  $\chi_m = -1$  بسیار مناسب است. نتایج با آنچه توسط روشهای فصل ۹ به دست آمد، تنها با جایگزین کردن  $\mu = 0$ ، یکسان است.

در یک فرمولبندی مشابه، که می تواند برای مسائلی شامل ابر رساناهای حامل جریان خارجی مناسب تر باشد، فرض می شود که در داخل ابر رسانا  $\mu = \mu_0$ ,  $\chi_m = 0$  شرط  $\vec{B} = 0$  با قرار دادن  $\vec{H} = 0 = \vec{M}$  در داخل ابر رسانا برقرار می شود، و شرایط مرزی با این





حل:

و بدلیل تقارن حاکم بر مسئله، میدان در داخل بره ابررسانا فقط به  $Z$  بستگی دارد و فقط دارای مؤلفه  $x$  است، بنابراین:

$$\vec{B}_{in} = B(Z) \hat{i}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \Rightarrow \frac{d^2 B}{dZ^2} = \frac{1}{\lambda^2} B(Z)$$

$$B(Z) = A e^{\frac{Z}{\lambda}} + B e^{-\frac{Z}{\lambda}}$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$B_{in}(z=0) = B_{out}(z=0) \Rightarrow A + B = B_0$$

$$B_{in}(z=d) = B_{out}(z=d) \Rightarrow A e^{\frac{d}{\lambda}} + B e^{-\frac{d}{\lambda}} = B_0$$

$$A = \frac{B_0(-1 + e^{\frac{2d}{\lambda}})}{e^{\frac{d}{\lambda}} - e^{-\frac{d}{\lambda}}}, B = \frac{B_0(1 - e^{\frac{2d}{\lambda}})}{e^{\frac{d}{\lambda}} - e^{-\frac{d}{\lambda}}}$$

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB(z)}{dz} \hat{j}$$

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{A}{\lambda} e^{\frac{z}{\lambda}} - \frac{B}{\lambda} e^{-\frac{z}{\lambda}} \right] \hat{j}$$

۱۵-۳- با استفاده از معادلات لندن و عمق نفوذ پدیده شناختی  $\lambda$ ، محاسبات مسئله ۱۵-۱ را انجام دهید.

حل: با توجه به مسئله (۱۵-۱) در اینجا فرض می‌کنیم میدان در خارج استوانه به صورت زیر باشد:

$$\vec{B}_{out} = B_0 \hat{i} - b \left( \frac{a}{r} \right)^2 (\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta)$$

و میدان در داخل استوانه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$B_r = u(r) \cos \theta, B_\theta = V(r) \sin \theta$$

دو تابع  $V(r), u(r)$  باید به گونه‌ای تعیین شوند که معادله لندن و شرایط مرزی را برآورده نمایند. با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$(B_r)_{out}|_{r=a} = (B_r)_{in}|_{r=a} \Rightarrow (B_0 - b) \cos \theta = u(a) \cos \theta$$

$$\Rightarrow B_0 - b = u(a)$$

$$(B_\theta)_{out}|_{r=a} = (B_\theta)_{in}|_{r=a} \Rightarrow -(B_0 + b) \sin \theta = V(a) \sin \theta$$

$$\Rightarrow -B_0 - b = V(a)$$

و با توجه به معادله لندن داریم:

$$+ B_n \sin(n\theta) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos(n\theta) + B'_n \sin(n\theta)) r^{-n}$$

و با توجه به اینکه وقتی  $r \rightarrow \infty$  آنگاه  $r \cos \theta \rightarrow \frac{-B_0}{\mu_0} \varphi_{out}^*$  می‌شود،

بنابراین می‌توان  $\varphi^*$  را در داخل و خارج به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_{out}^* = \frac{-B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{A'_1}{r} \cos \theta$$

$$\varphi_{in}^* = A_1 r \cos \theta$$

با اعمال شرایط مرزی حاکم بر مسئله می‌توان ضرایب  $A_1, A'_1$  را بدست آورد:

$$B_{in}|_{r=a} = B_{out}|_{r=a} \Rightarrow (B_r)_{out}|_{r=a} = (B_r)_{in}|_{r=a}$$

$$\vec{B}_{in} = 0 \Rightarrow (B_r)_{out}|_{r=a} = 0$$

$$-\mu_0 \frac{\partial \varphi_{out}^*}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \Rightarrow -\frac{B_0}{\mu_0} \cos \theta - \frac{A'_1}{a^2} \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow A'_1 = \frac{-B_0 a^2}{\mu_0}$$

$$H_{1t}|_{r=a} = H_{2t}|_{r=a} \Rightarrow (H_\theta)_{out}|_{r=a} = (H_\theta)_{in}|_{r=a}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{out}^*}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{out}^*}{\partial \theta} \Big|_{r=a} - \frac{r B_0}{\mu_0} \sin \theta$$

$$= A_1 \sin \theta \Rightarrow A_1 = \frac{-r B_0}{\mu_0}$$

بنابراین میدان در داخل و خارج به صورت زیر است:

$$\vec{B} = 0, \vec{H} = -\nabla \varphi_{in}^* = \frac{r B_0}{\mu_0} \hat{i}, \vec{M} = -\vec{H} = \frac{-r B_0}{\mu_0} \hat{i}$$

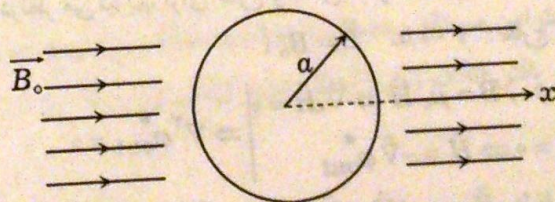
خارج:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -\mu_0 \nabla \varphi_{out}^* = B_0 \hat{i} - B_0 \frac{a^2}{r^2} (\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta)$$

و چگالی سطحی در سطح استوانه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$j_M = \hat{n} \times [\vec{M}_{out} - \vec{M}_{in}] = \hat{n} \times [0 - \vec{M}_{in}] = \hat{r} \times [-\vec{M}_{in}]$$

$$= \frac{-r B_0}{\mu_0} \sin \theta \hat{k}$$



۱۵-۲- تیغه ابررسانای بی‌نهایت بزرگی به ضخامت  $d$  را در نظر بگیرید که دو سطح آن در  $z=d$  و  $z=0$  قرار دارند. در خارج از تیغه میدان مغناطیسی یکنواخت و موازی با سطوح آن است،  $B_x = B_0$  با استفاده از معادلات لندن و عمق نفوذ پدیده شناختی  $\lambda$ ، میدان و چگالی جریان را در داخل تیغه به دست آورید.



با توجه به نتایج بالا و روابطی که از شرایط مرزی بدست آمده، خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \frac{C}{a} I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) &= u(a) = B_0 - b \\ -\frac{C}{\lambda} I_1'\left(\frac{a}{\lambda}\right) &= V(a) = -B_0 - b \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = \frac{2B_0}{\frac{1}{a} I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} I_1'\left(\frac{a}{\lambda}\right)}$$

$$b = \frac{\frac{a}{\lambda} I_1'\left(\frac{a}{\lambda}\right) B_0 - I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) B_0}{\frac{a}{\lambda} I_1'\left(\frac{a}{\lambda}\right) + I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right)}$$

و بنابراین:

$$\vec{B}_{in} = (u(r) \cos \theta) \hat{r} + (V(r) \sin \theta) \hat{\theta}$$

۱۵-۴- کره ابررسانایی به شعاع  $a$  را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی قرار گرفته و این میدان در فواصل دور از کره یکنواخت و اندازه‌اش  $B_0$  است. با استفاده از فرمولبندی مثال ۱۵-۳ به عنوان مبنا، مطالب زیر را فراهم آورید: (الف) بسطی برای  $\nabla \times \nabla \times \vec{B}$  از آن معادلاتی را که مؤلفه‌های  $B$  در داخل کره در آن صدق می‌کنند. (ب) اثباتی برای معادله (۱۵-۲۷). (ج) یک بحث کمی درباره کاهش نمایی  $B$  در ناحیه نزدیک به سطح کره.

حل: (الف) میدان مغناطیسی در داخل کره را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{B} = B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ B_r & rB_\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r \sin \theta}{r^2 \sin \theta} \hat{\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (B_r) \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (B_r) \right] \hat{\phi}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & \frac{r \sin \theta}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (B_r) \right] \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (B_r) \right] \right] - \frac{r\hat{\theta}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sin \theta \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (B_r) \right] \right] \quad (۱)$$

با فرض میدان  $B$  به صورت زیر:

$$B_r = U(r) \cos \theta$$

$$B_\theta = V(r) \sin \theta \quad (۲)$$

و با توجه به معادله لندن می‌توان معادلات مورد نظر را به صورت زیر بدست آورد:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad (۳)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (B_r) \right]$$

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (U \cos \theta) \right]$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}, \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\lambda^2} **$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u \cos \theta & rV \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r} \left[ (V + r \frac{dV}{dr}) \sin \theta + u \sin \theta \right] \hat{k} = \left( \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} + \frac{u}{r} \right) \sin \theta \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \left[ \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} + \frac{u}{r} \right] \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\hat{r}}{r} \left[ \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} + \frac{u}{r} \right] \cos \theta - \hat{\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} + \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right] \sin \theta$$

$$\sin \theta = -\frac{\vec{B}}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} [u \cos \theta \hat{r} + V \sin \theta \hat{\theta}]$$

بنابراین:

$$\frac{V}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{u}{r^2} = \frac{-u}{\lambda^2} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} + \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{V}{\lambda^2} \quad (۲)$$

معادله (۱) را در  $r$  ضرب کرده، از آن مشتق گرفته و آن را از معادله (۲) کم می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$V = -(u + r \frac{du}{dr}) \quad (۳)$$

با جایگذاری در رابطه (۲) داریم:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{r}{r^2} \frac{du}{dr} - \frac{u}{\lambda^2} = 0$$

با تغییر متغیر  $t = ur$  خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} \left( \frac{t}{r} \right) + \frac{r}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{t}{r} \right) - \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{t}{r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} - \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{r^2} \right) t = 0$$

و با تغییر متغیر  $x = \frac{r}{\lambda}$  داریم:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dt}{dx} - \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) t = 0$$

که جواب این معادله، تابع بسل تغییر یافته نوع اول و مرتبه اول است:

$$t(r) = C I_1(x) = C I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) \Rightarrow u = \frac{t}{r} = \frac{C}{r} I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (۴)$$

$$(۳), (۴) \Rightarrow V = -\frac{C}{\lambda} I_1'\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (۵)$$

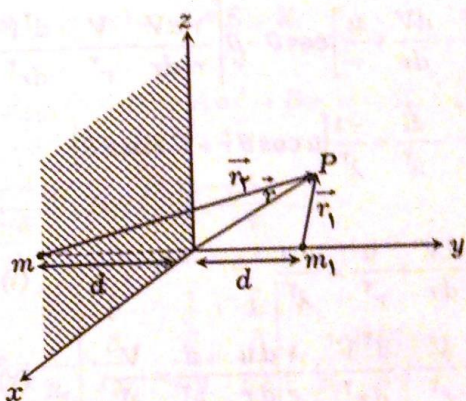


$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} e^{-\frac{\delta}{\lambda}}$$

در واقع  $\vec{B}$  در ناحیه نزدیک به سطح استوانه به طور نمایی کاهش می‌یابد.  
 ۱۵-۶- یک دوقطبی مغناطیسی به فاصله  $d$  بالای یک تیغه ابررسانا و به موازات تیغه قرار دارد. (برای سادگی فرض کنید تیغه در ابعاد عرضی بی‌نهایت گسترده است.) (الف) ابررسانا را به صورت یک ماده مغناطیسی با  $\chi_m = -1$  در نظر بگیرید و دوقطبی تصویری (یا دسته‌ای از دوقطبیهای تصویری را بیابید که موجب ارضای شرایط مرزی در فصل مشترک بین ماده و هوا بشود.) [به مسئله ۹-۱۵ (ب) نیز رجوع کنید]. (ب) نیروی مغناطیسی وارد بر دوقطبی را محاسبه کنید. (ج) اگر جرم دوقطبی  $m_D$  باشد، در چه فاصله  $d$  نیروی مغناطیسی با نیروی وزن دوقطبی در توازن خواهد بود.

حل: میدان مغناطیسی حاصل از یک دو قطبی در فاصله  $(r)$  از آن:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{-\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right]$$



با توجه به شکل میدان مغناطیسی در نقطه  $P$  (فرض می‌کنیم  $P$  در صفحه  $xy$  است) به صورت زیر است:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \left( \frac{-\vec{m}_1}{r_1^3} + \frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r}_1)\vec{r}_1}{r_1^5} \right) + \left( \frac{-\vec{m}_2}{r_2^3} + \frac{3(\vec{m}_2 \cdot \vec{r}_2)\vec{r}_2}{r_2^5} \right) \right]$$

$$\vec{m}_1 = m_1 \hat{i}, \quad \vec{r}_1 = r_{1y} \hat{j} + r_{1z} \hat{k} \Rightarrow \vec{m}_1 \cdot \vec{r}_1 = 0$$

$$\vec{m}_2 = m_2 \hat{i} + m_2 y \hat{j} + m_2 z \hat{k}, \quad \vec{r}_2 = r_{2y} \hat{j} + r_{2z} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{m}_2 \cdot \vec{r}_2 = m_2 y r_{2y} + m_2 z r_{2z}$$

بنابراین:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{-m_1 \hat{i}}{r_1^3} + \frac{-\vec{m}_2}{r_2^3} + \frac{3(m_2 y r_{2y} + m_2 z r_{2z})}{r_2^5} (r_{2y} \hat{j} + r_{2z} \hat{k}) \right]$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = 0 \Leftrightarrow \chi_m = -1$$

در داخل ابررسانا  $\mu = 0$  می‌توان مقدار و جهت  $\vec{m}_2$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$\eta = r_y \Rightarrow B_n = 0 \Rightarrow \vec{B} \cdot \hat{j} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-\vec{m}_2 \cdot \hat{j}}{r_2^3} + \frac{3(m_2 y r_{2y} + m_2 z r_{2z})}{r_2^5} r_{2y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-m_2 y}{r_2^3} + \frac{3(m_2 y r_{2y} + m_2 z r_{2z})}{r_2^5} r_{2y} = 0 \quad (1)$$

$$= \sin \theta \left[ V + r \frac{dV}{dr} + U \right] \quad (4)$$

$$(1), (3), (4) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin^2 \theta \left( V + r \frac{dV}{dr} + U \right) \right] = -\frac{1}{\lambda^2} U \cos \theta \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sin^2 \theta \left( V + r \frac{dV}{dr} + U \right) \right] = \frac{1}{\lambda^2} V \sin \theta \end{cases}$$

با ساده کردن این معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases} r \frac{dV}{dr} + V = -\left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) U \\ r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + 2r \frac{dV}{dr} + r \frac{dU}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2} V \end{cases}$$

۱۵-۵- یک سیم بلند و مستقیم ابررسانا به شعاع  $a$  میلی‌متر حامل جریان است. (الف) میدان مغناطیسی روی سطح سیم چیست؟ (ب) مقدار جریان  $I$  را که شار مغناطیسی ناشی از آن بتواند به درون سیم نفوذ کند، چنانچه جنس آن از  $Pb$  یا  $Ta$  یا  $Nb$  در  $4/K$  باشد، محاسبه کنید.

حل: میدان در داخل سیم حامل جریان برابر است با:

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \frac{J_1\left(\frac{ir}{\lambda}\right)}{J_1\left(\frac{ia}{\lambda}\right)}$$

(الف)

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r B_{\theta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r \mu_0} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r B_{\theta}) \right) \hat{k}$$

$$= \frac{I_0 \hat{k}}{(2\pi a) r J_1\left(\frac{ia}{\lambda}\right)} \left[ J_1\left(\frac{ir}{\lambda}\right) + r \frac{i}{\lambda} J_1'\left(\frac{ir}{\lambda}\right) \right]$$

(ب) برای  $x \gg 1$ ، تابع بسل تغییر یافته به صورت زیر می‌آید:

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right] \xrightarrow{x \gg 1} I_1(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

و با توجه به  $J_1\left(\frac{ir}{\lambda}\right) = i I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)$  داریم:

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \frac{I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right)}$$

بنابراین، برای  $\lambda \ll a$  و  $\lambda \ll r$  داریم:

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \frac{\frac{e^{\frac{r}{\lambda}}}{\sqrt{\frac{r}{\lambda}}}}{\frac{e^{\frac{a}{\lambda}}}{\sqrt{\frac{a}{\lambda}}}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{r-a}{\lambda}}$$

با در نظر گرفتن  $a \approx r$ ،  $a - r = \delta$  خواهیم داشت:



فصل

$$B_t = 0 \Rightarrow \vec{B} \cdot \hat{i} = 0 \quad (r_1 = r_2)$$

$$\Rightarrow \frac{-m_1}{r_1^3} \frac{m_2 x}{r_2^3} = 0 \Rightarrow m_2 x = -m_1 \quad (2)$$

$$\vec{B} \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow \frac{-m_2 z}{r_2^3} + \frac{r_2(m_2 y r_{2y} + m_2 z r_{2z})}{r_2^5} r_{2z} = 0 \quad (3)$$

با ساده کردن روابط به دست آمده (1) و (2) و (3) در مرکز خواهیم داشت:  
 $m_2 x = -m_1$  ,  $m_2 y = 0$  ,  $m_2 z = 0$   
 در واقع  $\vec{m}_2$  در فاصله  $d$  در طرف دیگر صفحه و در خلاف جهت آن است.  
 (ب)

$$U = \vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2 = m_1 \hat{i} \cdot \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m_2 \hat{i}}{y^3} + \frac{r_2(\vec{m}_2 \cdot \vec{r}) \vec{r}}{y^5} \right) \right] \vec{r} = \hat{j} \frac{\mu_0 m_2 m_1}{4\pi y^3}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} = -\frac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_2 \left( \frac{-3}{y^4} \right) \hat{j}$$

$$\vec{F}(y=2d) = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_2 \left( \frac{3}{16d^4} \right) \hat{j}$$

(ج)

$$F = m_D g \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_2 \left( \frac{3}{16d^4} \right) = m_D g \Rightarrow d = \left[ \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{64\pi m_D g} \right]^{\frac{1}{4}}$$

۷-۱۵ نفوذ "نمایی" میدان مغناطیسی به درون سیم استوانه‌ای  
 با شعاع  $a$  (شکل ۳-۱۵) را با نتیجه مربوط به وضعیت هندسی  
 یک بعدی تیغه بی نهایت مقایسه کنید. برای استوانه از پاسخ تابع  
 بسل بر پایه  $I_1(r/a)$  استفاده کنید.

حل:

۷-۱۵ با توجه به شعاع استوانه  $a$  و رابطه‌ی میدان مغناطیسی داریم:

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \frac{J_1\left(\frac{ir}{a}\right)}{J_1\left(\frac{ia}{a}\right)} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \frac{J_1\left(\frac{r}{a}\right)}{J_1\left(\frac{a}{a}\right)}$$

حال اگر به جای  $a = a$  قرار دهیم داریم:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \rightarrow \frac{B}{B_0} = \frac{J_1\left(\frac{r}{a}\right)}{J_1(1)}$$

| $x$           | ۰ | ۱۰     | ۲۰    | ۳۰    | ۴۰    | ۵۰    | ۶۰    |
|---------------|---|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{r}{a}$ | ۰ | ۰/۵۶۲۵ | ۱/۵۹۱ | ۳/۹۵۳ | ۹/۷۵۹ | ۲۴/۳۴ | ۶۱/۳۴ |

$$\rightarrow I_1(x) = I_1(1) = 24/34$$

| $\frac{B}{B_0}$ | ۰ | ۰/۲۳ | ۰/۰۶۵ | ۰/۱۶۲ | ۰/۴۰۱ | ۱ |
|-----------------|---|------|-------|-------|-------|---|
| $\frac{r}{a}$   | ۰ | ۱    | ۲     | ۳     | ۴     | ۵ |



## معادلات ماکسول

هر کدام از این معادلات نماینده تعمیم یک دسته از مشاهدات تجربی اند: معادله (۱۶-۳) تعمیم قانون آمپر است، معادله (۱۶-۴) صورت دیفرانسیلی قانون الکترو مغناطیسی فاراده است، معادله (۱۶-۵) تعمیم قانون گاوس است که خود از قانون کولن نتیجه می شود، معادله (۱۶-۶) را معمولاً می گویند نماینده این واقعیت است که هرگز قطب تنهای مغناطیسی مشاهده نشده است.

معادلات ماکسول را می توان تقریباً در کلیه وضعیتهای میکروسکوپی به کار برد. اگر موادی موجود باشند، برای آنکه بتوانیم معادلات ماکسول را به کار ببریم، باید معادلات ساختمندی مناسب را نیز بدانیم (یا به طور تجربی و یا از نظریه میکروسکوپی مربوط به ماده نوع به خصوص).

وقتی معادله نیروی لورنتس،  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ، که اثر میدانها بر روی ذرات باردار را توصیف می کند، با این معادلات جفت شود، این مجموعه قوانین توصیف کلاسیکی کاملی برای ذرات با برهم کنش الکترومغناطیسی فراهم می آورد.

دیدیم که جریان جابه جایی که در بخش قبل معرفی شد برای آنکه بقای بار داشته باشیم ضروری است، و هنگامی که آن را در معادلات کاکسول وارد کردیم، این معادلات، معادله پیوستگی را ایجاد می کنند، به گونه ای که لازم نیست این معادله را به مجموعه معادلات بنیادی بیفزاییم.

### انرژی الکترو مغناطیسی

از فصل (۶) می دانیم که پتانسیل الکتریسیته ساکن دستگاه بارهایی که میدان الکتریکی مربوط را ایجاد می کنند برابر است با:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad (16-7)$$

و از فصل (۱۲)، کمیت زیر

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \quad (16-8)$$

را به عنوان انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی می دانیم. با استفاده از این دو عبارت در وضعیتهای غیر ساکن بدست می آوریم:

### تعمیم قانون آمپر: جریان جابه جایی

در فصل ۹ دیدیم که میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریان، در قانون مداری آمپر صدق می کند:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J} \cdot \hat{n} da \quad (16-1)$$

می توان نشان داد که این قانون گاهی با شکست روبه رو می شود، بنابراین برای آن تعمیمی پیدا می کنیم که همیشه معتبر باشد. با در نظر گرفتن قانون آمپر دیفرانسیلی و با استفاده از قانون گاوس می توان قانون آمپر را تغییر داد و آن را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (16-2)$$

و مشتق زمانی  $\vec{D}$  را به عنوان جریان جابه جایی اطلاق کنیم.

در فصلهای قبل ما از جریان جابه جایی چشمپوشی کردیم. این چشمپوشی به خاطر یکی از سه دلیل زیر امکان پذیر بود: میدانها نسبت به زمان ثابت بودند و نتیجتاً مشتقهای زمانی صفر بودند، مواد رساناهای الکتریکی خوبی بودند به طوریکه جریان جابه جایی در مقایسه با جریان رسانش کوچک بود، یا آنکه جریان جابه جایی محدود به ناحیه کوچکی از فضا می شد که لازم نبود به طور صریح در نظر گرفته شود (مثلاً در خازنها).

### معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها

این فصل حاوی مبانی نظریه الکترومغناطیس کلاسیک است.

معادلات ماکسول معادلات دیفرانسیلی هستند که (همراه با شرایط مرزی برای هر وضعیت خاص) میدانهای تولید شده به وسیله چشمه های بار و جریان را تعیین می کنند.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (16-3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16-4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (16-5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (16-6)$$



$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) - \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (۹-۱۶)$$

این رابطه بیان کننده پایستگی موضعی انرژی در هر نقطه است. اگر علامتهای اختصاری زیر را بکار ببریم:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (۱۰-۱۶)$$

$$u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (۱۱-۱۶)$$

در نتیجه در هر نقطه معادله زیر برقرار است:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (۱۲-۱۶)$$

$\vec{J} \cdot \vec{E}$  کاری است که میدان موضعی روی ذرات باردار در واحد حجم انجام می دهد و  $u$  چگالی انرژی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است. اگر  $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$  باشد، در آن صورت معادله (۱۲-۱۶) بقای موضعی انرژی را بیان خواهد کرد، در واقع در هر نقطه، آهنگ تغییر انرژی میدان برابر است با اتلاف توان در واحد حجم. اگر  $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \neq 0$  و  $\vec{J} \cdot \vec{E} = 0$  باشد (برای مثال در یک محیط نارسانا)، آنگاه

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (۱۳-۱۶)$$

این معادله از نظر ریاضی دقیقاً همانند معادله پیوستگی بار الکتریکی است.

معمولاً خود بردار  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  را به عنوان جریان موضعی انرژی در واحد زمان در واحد سطح در نظر می گیرند.

#### معادله موج

یکی از مهم ترین پیامدهای معادلات ماکسول، معادلات انتشار موج الکترومغناطیسی در محیط خطی است. معادله موج برای  $\vec{H}$  را می توان با گرفتن تاو از معادله (۳-۱۶) به دست آورد:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - g \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (۱۴-۱۶)$$

با گرفتن تاو از معادله (۴-۱۶) و محدود کردن کاربرد معادله به فضای تهی از بار آزاد به طوری که  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$  باشد، نتیجه خواهد شد:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - g \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (۱۵-۱۶)$$

میدان الکترومغناطیسی در یک محیط خطی و همگن که چگالی بار در آن صفر است، خواه محیط رسانا باشد خواه نارسانا، از معادلات موجی که در بالا به دست آمد پیروی می کند. با وجود این، تنها کافی نیست که میدان در این معادلات صدق کند، بلکه باید در معادلات ماکسول نیز صادق باشد. در حل معادلات موج، باید مخصوصاً دقت کرد که پاسخهایی برای معادلات ماکسول به دست آوریم.

#### امواج تکفام

امواج تکفام را می توان به صورت امواجی توصیف کرد که در آن تمام میدانها با یک فرکانس منفرد مشخص می شوند. در آن صورت می توان  $\vec{E}$  را از حل معادله (۱۵-۱۶) به دست آورد و سپس با استفاده از معادلات ماکسول و معادلات ساختمندی میدانهای دیگر را به دست آورد. برای انجام این کار، روشهای تحلیل متغیرهای مختلط

بسیار مناسب اند، بستگی زمانی میدان به صورت  $e^{-i\omega t}$  فرض می شود، بنابراین:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (۱۶-۱۶)$$

و با قرار دادن آن در معادله موج  $\vec{E}$  خواهیم داشت:

$$e^{-i\omega t} [\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} + i\omega g \mu \vec{E}] = 0 \quad (۱۷-۱۶)$$

این معادله ای است که تغییرات فضایی میدان الکتریکی باید از آن پیروی کند.

با فرض اینکه «محیط» فضای تهی است، به طوری که  $g=0$ ،  $\mu = \mu_0$ ،  $\epsilon = \epsilon_0$  و به علاوه فرض اینکه  $\vec{E}(\vec{r})$  تنها در یک راستا، برای مثال در راستای  $z$ ، تغییر می کند و به  $y, x$  بستگی ندارد، معادله بالا به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2 \vec{E}(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E} = 0, \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (۱۸-۱۶)$$

این معادله (که به معادله هلمهولتز معروف است) از نظر ریاضی با معادله نوسانگر هماهنگ یکسان است و پاسخهای این معادله عبارت اند از:

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{\pm i k z} \quad (۱۹-۱۶)$$

که در آن  $E_0$  بردار ثابتی است و  $k = \frac{\omega}{c}$ . بنابراین پاسخ کامل به صورت زیر است:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t \mp k z)} \quad (۲۰-۱۶)$$

و با گرفتن قسمت حقیقی آن داریم:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= E_0 \cos(\omega t \pm k z), \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= E_0 \cos \omega \left(t \pm \frac{z}{c}\right) \end{aligned} \quad (۲۱-۱۶)$$

این معادله نمایانگر یک موج سینوسی است که در راستای  $z$  به سمت راست یا به سمت چپ (بسته به آنکه کدام یک از دو علامت مثبت یا منفی به کار گرفته شوند) حرکت می کند. سرعت انتشار موج  $c$  است.

برای یک محیط دی الکتریک نارسانای غیرمغناطیسی که  $g=0$  و  $\mu = \mu_0$ ،  $\epsilon = K \epsilon_0$ ، به دست می آید:

$$k = \sqrt{K} \frac{\omega}{c} \quad (۲۲-۱۶)$$

اگر  $n$  را به صورت  $n = \sqrt{K}$  تعریف کنیم، می بینیم که نتایج با حالت مربوط به خلاء یکسان اند بجز آنکه اکنون سرعت انتشار موج به جای  $c$  برابر است با  $\frac{c}{n}$ ، کمیت  $n$  ضریب شکست محیط دی الکتریک نامیده می شود.

اگر محیط رسانا باشد،  $g > 0$ ، جمله سوم در معادله (۱۷-۱۶) را باید نگه داریم. هنگامی که  $g$  کوچک است، جمله سوم این معادله در مقایسه با جمله دوم آن که به پاسخ موجی منجر شد، کوچک باشد، به عبارت دیگر

$$\omega g \mu \ll \omega^2 \epsilon \mu \Rightarrow g \ll \omega \epsilon \quad (۲۳-۱۶)$$

نتیجه صرفاً آن خواهد بود که موج میرا می شود.



اگر  $\sigma$  صفر نباشد، که شاید هم اینطور باشد، در این صورت می‌توان آن را از معادلات (۳۱-۱۶) حذف کرد، بنابراین:

$$(\epsilon_1 + i \frac{g_1}{w}) E_{1n} - (\epsilon_2 + i \frac{g_2}{w}) E_{2n} = 0 \quad (33-16)$$

آخرین مورد جالبی که اتفاق می‌افتد، هنگامی است که یکی از رسانندگیها، مثلاً  $g_2$  بینهایت است. در این مورد  $E_{2n}$  باید صفر و  $E_{1n}$  باید مساوی  $\frac{\sigma}{\epsilon_1}$  شود تا این معادلات صادق باشند.

با استفاده از معادله ماکسول زیر:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \Rightarrow H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp} \quad (34-16)$$

که در آن  $j_{\perp}$  آن مؤلفه از چگالی جریان سطحی است که بر امتداد آن مؤلفه از  $\vec{H}$  که در معادله ظاهر می‌شود عمود است. چگالی جریان سطحی نشان دهنده یک جریان متناهی در یک لایه سطحی بینهایت نازک است. بجز در موردی که رسانندگی بینهایت باشد، چگالی جریان سطحی صفر است، بنابراین برای رسانندگی غیر بینهایت مؤلفه مماسی  $\vec{H}$  پیوسته است:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (35-16)$$

اگر رسانندگی محیط (۲) بینهایت باشد، در آن صورت همان‌طور که قبلاً نشان دادیم،  $E_{2n} = 0$ .

با در نظر گرفتن معادله ماکسول زیر:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (36-16)$$

و با به کار بردن روابط ساختمندی و با فرض اینکه  $\vec{E}_2$  به صورت  $e^{-i\omega t}$  نسبت به زمان تغییر می‌کند، نتیجه خواهد شد:

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{g_2 - i\omega\epsilon_2} \vec{\nabla} \times \vec{H}_2 \quad (37-16)$$

در واقع  $\vec{E}_2$  در محیطی با رسانندگی بینهایت، صفر می‌شود.

و با توجه به رابطه زیر:

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \vec{\nabla} \times \vec{E}_2 \quad (38-16)$$

صفر شدن  $\vec{E}_2$  ایجاب می‌کند که  $\vec{H}_2$  نیز صفر شود. در این صورت شرط مرزی روی مؤلفه مماسی  $\vec{H}$  در فصل مشترک دو محیط رسانندگی یکی از آنها بینهایت است، عبارت خواهد بود از:

$$H_{1t} = j_{\perp} \quad (39-16)$$

معادله موج با چشمه‌ها

میدانهای  $\vec{E}$ ،  $\vec{B}$  را می‌توان از توابع پتانسیل به دست آورد.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (40-16)$$

چنانچه شرط لورنتس

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (41-16)$$

اعمال شود، پتانسیلها در معادلات موج غیر همگن زیر صدق می‌کنند:

هنگامی که  $g \gg \epsilon w$  باشد می‌توانیم از جمله دوم معادله (۱۶-۱۷) چشم‌پوشی کنیم. اگر توجه خود را به مورد یک بعدی محدود کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + i\omega g \mu E = 0 \quad (24-16)$$

چنانچه فرض کنیم  $\alpha = i\omega$  حقیقی باشد یا، به بیان دیگر، اگر فرض کنیم فرکانسی موهومی باشد، ضریب  $E$  در جمله دوم حقیقی خواهد بود. در آن صورت اگر  $k = \sqrt{\alpha g \mu}$ ، بستگی فضایی پاسخ،  $E(r)$  به صورت زیر است:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(r) e^{-\alpha t} \quad (25-16)$$

گذار بین رفتار موجی و رفتار کاهش یابنده هنگامی رخ می‌دهد که

$$|w| = |\alpha| \approx \left| \frac{g}{\epsilon} \right| = \frac{1}{t_c} \quad (26-16)$$

که همان زمان واهلش ماده است.

شرایط مرزی

شرایط مرزی که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در فصل مشترک دو محیط باید در آنها صدق کنند درست مانند حالت ساکن، از معادلات ماکسول استنتاج می‌شوند.

با استفاده از معادله ماکسول زیر می‌توان نشان داد که:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n} \quad (27-16)$$

با استفاده از معادله ماکسول زیر، صورت دیفرانسیلی قانون الکترومغناطیسی فاراده، می‌توان نشان داد که مؤلفه مماسی  $\vec{E}$  در فصل مشترک دو محیط پیوسته است:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t} \quad (28-16)$$

و با توجه به معادله تعمیم قانون گاوس می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow (D_{1n} - D_{2n}) = \sigma \quad (29-16)$$

که در آن  $\sigma$  چگالی بار سطحی در فصل مشترک است.

با توجه به اینکه بار الکتریکی باید بقا داشته باشد، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (30-16)$$

اگر تنها تابش تکفام را در نظر بگیریم، چگالی بار سطحی باید به صورت  $e^{-i\omega t}$  تغییر کند، با بکار بردن روابط ساختمندی  $\vec{J} = g\vec{E}$ ،  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$  معادله‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{cases} \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma \\ g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = i\omega \sigma \end{cases} \quad (31-16)$$

چند مورد جالب عملی را می‌توان مورد توجه قرار داد. اگر  $\sigma$  مساوی صفر باشد، آنگاه

$$\frac{\epsilon_1}{g_1} = \frac{\epsilon_2}{g_2} \quad (32-16)$$

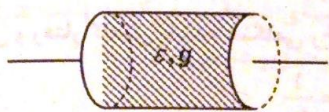
که این رابطه می‌تواند یا برای موادی که به طور مناسب انتخاب شده‌اند و یا چنانچه  $g_1$ ،  $g_2$  هر دو صفر یا بینهایت باشند، صادق باشد.



## مسائل فصل شانزدهم

۱۶-۱ ناحیه بین صفحات دایروی متوازی یک خازن از دی الکتریکی با گذردهی  $\epsilon$  پر شده است. دی الکتریک ناکامل است و رسانندگی آن  $g$  است. ظرفیت این خازن  $C$  است. این خازن را با اختلاف پتانسیل  $\Delta\phi$  باردار و سپس آن را از این اختلاف پتانسیل قطع می کنیم. (الف) بار روی خازن را بر حسب تابعی از زمان به دست آورید. (ب) جریان جابه جایی در دی الکتریک را پیدا کنید. (ج) میدان مغناطیسی در دی الکتریک را به دست آورید.

حل:



گذردهی دی الکتریک  $\epsilon$  است. دی الکتریک نا کامل است و رسانندگی آن  $g$  است.

الف) با روی خازن بر حسب زمان:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{J} = g \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$g \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow g \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{g \rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{g \rho}{\epsilon} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{g}{\epsilon} t \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t}$$

چگالی بار نسبت به زمان به این صورت رفتار می کند و به حالت تعادل الکتروستاتیکی نزدیک می شود.

$$\rho = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = Q_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t}, \quad \frac{Q_0}{\Delta Q_0} = C \Rightarrow Q_0 = C \Delta \phi_0$$

چگالی حجمی بار آزاد از پیش تعیین شده آن برابر  $\rho_0$  است.

اگر این دستگاه رسانا را ناگهان از میدانهای الکتریکی وارد بر آن جدا کنیم، به سمت وضع تعادل که در آن هیچ بار اضافی در درون دستگاه وجود ندارد گرایش می یابد.

$$Q = C \Delta \phi_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t} \quad (\text{تغییرات بار روی خازن بر حسب زمان})$$

(ب) جریان جابه جایی در دی الکتریک:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{\Delta \phi}{d}$$

$$\frac{Q}{C} = \Delta \phi_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t} \Rightarrow \Delta \phi = \Delta \phi_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t} \quad (\text{تغییرات } \phi \text{ نسبت به زمان})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\Delta \phi_0}{d} e^{-\frac{g}{\epsilon} t}$$

$$D = \epsilon E = \epsilon \left( \frac{\Delta \phi_0}{d} e^{-\frac{g}{\epsilon} t} \right) \Rightarrow J_D = \frac{dD}{dt} = \frac{\epsilon}{d} \Delta \phi_0 \left( -\frac{g}{\epsilon} \right) e^{-\frac{g}{\epsilon} t}$$

$$\nabla^2 \phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (42-16)$$

این پتانسیلها امواج الکترومغناطیسی ناشی از توزیع بار و توزیع جریان از پیش مشخص شده را تعیین می کنند. پاسخهای خاص این معادلات (در خلاء) عبارتند از:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (43-16)$$

که در آن  $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$  زمان تأخیری نامیده می شود. این

پتانسیلها، پتانسیلهای تأخیری نامیده می شوند.

تعبیر فیزیکی پتانسیلهای تأخیری جالب است. این معادلات نشان می دهند که در یک نقطه مشخص  $r$  در یک زمان معین  $t$ ، پتانسیلها را بارها و جریانهایی که در زمانهای پیشتر  $t'$  در سایر نقاط فضا  $r'$  وجود داشته اند، تعیین می کنند.

فرض کنید که  $\phi, \vec{A}$  انتخاب خاصی برای توزیع توابع پتانسیل اند که میدانهای صحیح  $\vec{E}, \vec{B}$  را به دست می دهند. در این صورت، چنانچه ما پتانسیلهای جدید زیر را انتخاب کنیم:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \xi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (44-16)$$

(تابع  $\xi$  یک تابع کاملاً اختیاری است) دقیقاً همان میدانهای  $\vec{E}, \vec{B}$  را به دست خواهند داد. این تغییر در پتانسیلهای جدیدی که از نظر فیزیکی معادل اند، تبدیل پیمانه ای نامیده می شود.

با قرار دادن  $\phi', \vec{A}'$  در معادله (۴۱-۱۶)، معادله موج نرده ای زیر را برای  $\xi$  به دست می آید:

$$\nabla^2 \xi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t}) \quad (45-16)$$

بنابراین، چنانچه پتانسیلهای اصلی در شرط لورنتس صدق کنند، پتانسیلهای جدید نیز صدق خواهند کرد. مشروط بر آنکه  $\xi$  در معادله موج نرده ای همگن صدق کند. اگر  $\phi, \vec{A}$  اصلی در شرط لورنتس صدق نکنند، باز هم می توانیم پتانسیلهای جدیدی انتخاب کنیم که در این شرط صدق کنند که در آن صورت  $\xi$  باید به صورت پاسخ معادله موج نرده ای غیر همگن انتخاب شود.



بنابراین جریان القایی حاصل از عمل میدان الکتریکی بر روی دی الکتریک، صفر می‌شود.  
(الف)

(قانون تعمیم یافته آمپر)  
اگر  $C_1$  سطح مفروض باشد:

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} (\vec{J} + \vec{J}_D) \cdot \hat{n} da$$

از تقارن استوانه‌ای  $H$  به  $\phi$  بستگی ندارد، بنابراین:

$$H \int_{C_1} \pi a = \frac{\partial D}{\partial t} \pi a^2 \Rightarrow \vec{H} = \frac{a}{r} \frac{\partial D}{\partial t} \hat{\phi} \quad (1)$$

اگر سطح  $C_2$  باشد:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D = \vec{J} + 0$$

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (E=0 \text{ در داخل فلز})$$

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot \hat{n} da = I \Rightarrow H \int_{C_2} \pi a = I \hat{\phi} \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{r \pi a} \hat{\phi} \quad (2)$$

(1)، (2) باید مساوی باشند، بنابراین:

$$\vec{H} = \frac{a}{r} \frac{\partial D}{\partial t} \hat{\phi} = \frac{I}{r \pi a} \hat{\phi}$$

(ب) اندازه و جهت بردار پوینتینگ  $s$  در  $p$ :

میدان الکتریکی در جهت جریان و در جهت محور  $z$  ها است.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{D}{\epsilon} \frac{a}{r} \frac{\partial D}{\partial t} \hat{k} \times \hat{\phi} = \frac{-Da}{r \epsilon} \frac{\partial D}{\partial t} \hat{\rho}$$

$$\vec{s} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{D}{\epsilon} \hat{k} \times \frac{I}{r \pi a} \hat{\phi} = \frac{-DI}{r \pi a \epsilon} \hat{\rho}$$

(ج)

$$\oint_S \vec{s} \cdot \hat{n} da = \int_{S_1} \vec{s} \cdot \hat{n}_1 da + \int_{S_2} \vec{s} \cdot \hat{n}_2 da + \int_{S_3} \vec{s} \cdot \hat{n}_3 da$$

و با توجه به اینکه  $\hat{n}_1 \cdot \hat{\rho} = 0$ ،  $\hat{n}_2 \cdot \hat{\rho} = 0$ ،  $\hat{n}_3 \cdot \hat{\rho} = 0$  است، داریم:

$$\oint_S \vec{s} \cdot \hat{n} da = 0 + 0 + \int_{S_3} \vec{s} \cdot \hat{n}_3 da = \frac{-Da}{r \epsilon} \frac{\partial D}{\partial t} (r \pi a) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV \right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{D} dV = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V D^2 dV$$

چون  $D^2$  در حجم  $V$  یکنواخت است از زیر انتگرال بیرون می‌آید، بنابراین:

$$\frac{\partial u_E}{\partial t} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{\partial D^2}{\partial t} \int dV = \frac{D}{\epsilon} \frac{\partial D}{\partial t} \pi a^2 d \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow - \oint_S \vec{s} \cdot \hat{n} da = \frac{\partial u_E}{\partial t}$$

۱۶-۴ - یک سیم مستقیم فلزی با رسانندگی  $g$  و سطح

مقطع  $A$  حامل جریان پایای  $I$  است. اندازه و جهت بردار پوینتینگ

را در روی سطح این سیم به دست آورید. از مؤلفه عمودی بردار

پوینتینگ در روی سطح قسمتی از سیم به طول  $L$  انتگرال بگیرید

و نتیجه را با گرمای ژولی که در این قسمت تولید می‌شود، مقایسه

کنید.

$$= \frac{-g \Delta \phi_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t}}{d}$$

$$J_D = \frac{-g \Delta \phi_0}{d} e^{-\frac{g}{\epsilon} t}$$

(جگالی جریان جابه‌جایی)

(جریان جابه‌جایی)

$$I_D = J_D A = \frac{-g A}{d} \Delta \phi_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t} \quad (C = \epsilon \frac{A}{d}) \quad \frac{-g C}{\epsilon} \Delta \phi_0 e^{-\frac{g}{\epsilon} t}$$

(ج) میدان مغناطیسی:

$$\vec{J} = g \vec{E} = \frac{g \Delta \phi_0}{d} e^{-\frac{g}{\epsilon} t}, \quad J_D = \frac{-g \Delta \phi_0}{d} e^{-\frac{g}{\epsilon} t}$$

چون رسانندگی وجود دارد یک جریان (عکس‌العمل محیط نسبت به  $E$ ) را

داریم. (جریان القایی)

چون میدان متغیر با زمان داریم، یک چگالی جریان جابه‌جایی داریم.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = (J + J_D) A \Rightarrow B = 0$$

بنابراین میدان مغناطیسی داخل دی الکتریک صفر است.

۱۶-۲ - برای یک محیط دی الکتریک،  $Q$  به صورت نسبت چگالی

جریان جابه‌جایی به چگالی جریان رسانایی تعریف می‌شود. برای

انتشار موج تکفام، این کمیت به  $Q = w \epsilon / g$  تبدیل می‌شود. برای

کوارتز و گوگرد  $Q$  را در فرکانسهای  $10^6$ ،  $10^9$ ،  $10^{10}$  Hz به دست آورید.

حل: برای یک محیط دی الکتریک  $Q$  برابر است با:

$$Q = \frac{J_D}{J} = \frac{\frac{dD}{dt}}{\frac{\epsilon dE}{g}} = \frac{g}{\epsilon} \frac{dD}{dE}$$

برای انتشار موج تکفام:

$$E(r, t) = E(r) e^{-i \omega t} \Rightarrow Q = \frac{\epsilon}{g E} (-i \omega) e^{-i \omega t} E(r)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\epsilon \omega}{g}$$

۱۶-۳ - دو صفحه مسطح دایره‌ای به شعاع  $a$  که به فاصله  $d$  از

یکدیگر قرار دارند، یک خازن ایده‌آل تشکیل می‌دهند: فرض کنید

که دی الکتریک خازن عایقی کامل و میدان  $D$  یکنواخت است

(یعنی از میدان حاشیه‌ای در لبه صفحات چشمپوشی کنید). خازن با

جریان ثابت  $I$  در حال باردار شدن است. (الف) میدان  $H$  را در

نقطه  $P$  روی سطح استوانه‌ای دی الکتریک پیدا کنید. (ب) اندازه و

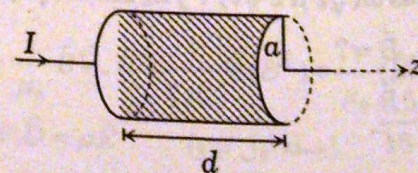
جهت بردار پوینتینگ  $S$  را در نقطه  $P$  پیدا کنید. (ب) از  $S \cdot n$  روی

سطح استوانه‌ای دی الکتریک انتگرال بگیرید، و نشان دهید که

نتیجه برابر است با آهنگ زمانی تغییر انرژی الکترواستاتیکی ذخیره

شده در خازن.

حل:



دی الکتریک خازن عایقی کامل است:



نشان دهید که معادله موج به صورت ساده‌ای در می‌آید که می‌توان به سادگی از آن انتگرال گرفت. از معادله موج انتگرال بگیرید تا نتیجه زیر حاصل شود.

که در آن  $E_1$  و  $E_2$  توابع دلخواهی هستند.

$$E(z,t) = E_1(\xi) + E_2(\eta) \quad \xi = t + \sqrt{\epsilon\mu}z, \eta = t - \sqrt{\epsilon\mu}z$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{\partial E_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial E_1}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon\mu}$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_1}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon\mu} \right) = \frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi^2} \sqrt{\epsilon\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi^2}$$

با جایگذاری روابط (۱)، (۲) داریم:

$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi^2} \Rightarrow (2) \text{ در معادله موج صادق است}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = \frac{\partial E_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial E_2}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} = -\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial E_2}{\partial \eta} \sqrt{\epsilon\mu} \right) = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_2}{\partial \eta^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{\partial E_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial E_2}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_2}{\partial \eta^2} \quad (5)$$

با جایگذاری روابط (۴)، (۵) داریم:

$$\epsilon\mu \frac{\partial^2 E_2}{\partial \eta^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_2}{\partial \eta^2} \Rightarrow (6) \text{ در معادله موج صادق است}$$

(یک جواب برای معادله موج گفته شده است)  $E(r,t) = E_1 + E_2$  (۲)، (۶)

۱۶-۷ موج الکترومغناطیسی زیر داده شده است

$E = iE_0 \cos w(\sqrt{\epsilon\mu}z - t) + jE_0 \sin w(\sqrt{\epsilon\mu}z - t)$

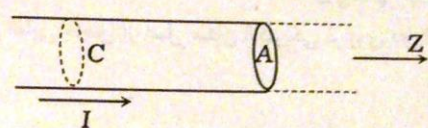
که در آن  $E_0$  مقدار ثابتی است. میدان مغناطیسی و بردار پوینتینگ آن را پیدا کنید.

حل:

$$\vec{E} = iE_0 \cos w(\sqrt{\epsilon\mu}z - t) + jE_0 \sin w(\sqrt{\epsilon\mu}z - t)$$

$$E_0 = \text{Cte}, \vec{B} = ?$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



حل:

چون جریان پایایی  $I$  داریم،  $E$  ثابت است و بنابراین:

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_D = I + 0 \Rightarrow H(\pi a) = I \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{\pi a} \hat{\phi}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{g}, \vec{J} = \frac{\vec{I}}{A} = \frac{I}{A} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = \frac{I}{gA} \hat{k}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \left( \frac{I}{gA} \right) \left( \frac{I}{\pi a} \right) \hat{k} \times \hat{\phi} = \frac{-I}{\pi a Ag} \hat{\rho}$$

$$\int_{s_L} \vec{S} \cdot \hat{n} da = \frac{-I^2}{\pi a Ag} (\pi a L) = \frac{-I^2 L}{Ag} \quad (1)$$

(سطح سیم به طول  $L$ )

$$RI^2 = \frac{L}{gA} I^2 \quad (2) \quad (\text{آهنگ تولید گرمای ژول})$$

$$(1), (2) \Rightarrow - \int \vec{S} \cdot \hat{n} da = RI^2$$

۱۶-۵ فرض کنید که در ناحیه‌ای از فضا یک میدان الکترواستاتیکی و همچنین یک میدان مغناطوستاتیکی وجود دارد. نشان دهید که هر چند که ممکن است بردار پوینتینگ غیر صفر باشد، ولی انتگرال سطحی  $\vec{S} \cdot \hat{n}$  بر روی هر سطح بسته‌ای واقع در این ناحیه صفر می‌شود.

حل:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\oint_V \vec{S} \cdot \hat{n} da = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dV = \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV$$

$$= \int \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} dV - \int \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} dV$$

$$= 0 \quad \text{چون} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$= 0 \quad \text{چون} \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

ولی اگر  $H$  را به صورت یکنواخت نسبت به فضا در نظر بگیریم،  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$  است و این یکنواخت بردار  $S$  غیر صفر ایجاد می‌کند.

نکته: اگر در ناحیه‌ای در فضا یک میدان الکترواستاتیکی و یک میدان مغناطوستاتیکی وجود داشته باشد، ممکن است که بردار پوینتینگ  $S$  غیر صفر باشد ولی انتگرال سطحی  $\vec{S} \cdot \hat{n} da$  روی هر سطح بسته‌ای واقع در این ناحیه صفر شود.

۱۶-۶ معادله موج یک بعدی زیر داده شده است

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

که در آن  $E$  اندازه بردار میدان الکتریکی است. فرض کنید  $E$  در امتداد یک جهت ثابت، مثل جهت  $y$ ، باشد. با تغییر متغیرهای زیر



$$-\epsilon_0 \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (۱)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (۲)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (۳)$$

با جایگذاری روابط (۲)، (۳)، در رابطه (۱) داریم:

$$-\epsilon_0 \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} = -[\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J}] \times \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$= -\vec{\nabla} \times \vec{H} \times \vec{B} + \vec{J} \times \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B}$$

$$+ \vec{J} \times \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \vec{J} \times \vec{B}$$

$$+ \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} B^2 \right) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] + \vec{J} \times \vec{B}$$

$$+ \epsilon_0 \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} E^2 \right) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \right]$$

بنابراین:

$$\vec{J} \times \vec{B} = -\epsilon_0 \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} B^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

$$- \epsilon_0 \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} E^2 \right) + \epsilon_0 \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})$$

$$\vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = ?$$

$$\vec{F} \times \vec{\nabla} \times \vec{G} + \vec{G} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + \vec{F} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) = \vec{\nabla} (\vec{F} \cdot \vec{G})$$

$$\vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\nabla} (B^2)$$

$$\vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} B^2 \right) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

۱۶-۹- یک موج تخت با  $E_x$  و  $B_y$  مشخص شده است و در جهت مثبت  $z$  انتشار می یابد

$$E = iE_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$

(الف) نشان دهید که می توان پتانسیل نرده ای  $\varphi$  را مساوی صفر گرفت. (ب) یک پتانسیل برداری  $A$  پیدا کنید که برای آن شرط لورنتس صادق باشد.

حل:

$$\vec{E} = iE_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$

(جهت انتشار موج، جهت مثبت محور  $z$  هاست)

مفروضات:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ، شرط لورنتس، برای  $\vec{A}$  صادق باشد.

$$\vec{A} = ? \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -iE_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 \cos w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) & E_0 \sin w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{i} w E_0 \sqrt{\epsilon \mu} \cos w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) + \hat{j} (-E_0 w \sqrt{\epsilon \mu} \sin w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) + \hat{k}(0))$$

بنابراین:

$$+ \hat{i} e w E_0 \sqrt{\epsilon \mu} \cos w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t)$$

$$+ \hat{j} (E_0 w \sqrt{\epsilon \mu} \sin w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \frac{+i w E_0 \sqrt{\epsilon \mu}}{-w} \sin w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t)$$

$$+ \frac{\hat{j} E_0 w \sqrt{\epsilon \mu}}{w} \cos w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t)$$

$$\vec{B} = -\hat{i} E_0 \sqrt{\epsilon \mu} \sin w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) + \hat{j} E_0 \sqrt{\epsilon \mu} \cos w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t)$$

$$\vec{S} = ? \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ E_0 \cos w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) & E_0 \sin w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) & 0 \\ \frac{E_0}{\mu} \sqrt{\epsilon \mu} \sin w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) & \frac{E_0}{\mu} \sqrt{\epsilon \mu} \cos w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0) + \hat{j}(0) + \hat{k} \left[ E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos^2 w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) \right.$$

$$\left. - E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin^2 w(\sqrt{\epsilon \mu} z - t) \right]$$

۱۶-۸- با شروع از عبارتی برای نیروی وارد بر واحد حجم در ناحیه ای از خلأ که حاوی بارها و جریانهای است

$$F_v = \rho E + J \times B$$

و با استفاده از معادلات ماکسول و اتحاد برداری معادله (۱۴-۲۴)، نشان دهید

$$F_v = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{\nabla} (E^2) + \epsilon_0 (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

$$+ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} (B^2) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

(کمیت  $\vec{E} \times \vec{B}$  گاهی چگالی اندازه حرکت میدان الکترومغناطیسی نامیده می شود.)

حل: در ناحیه ای از خلأ که حاوی بارها و جریانها است، نیروی وارد بر واحد حجم:

$$\vec{F}_V = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad \rho \neq 0, \quad J = 0$$

$$F_V = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{\nabla} (E^2)$$

$$+ \epsilon_0 (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} (B^2) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} = \rho \vec{E} \quad (\text{جمله اول نیرو})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$



نکته: در خلاء با  $\rho = 0, J = 0$ ، معادلات ماکسول به طور صحیحی تنها از یک تابع برداری  $\vec{A}$  در پیمانه کولن صادق باشد و در معادله موج خودش با  $J = 0$  صادق باشد بدست می آیند.

۱۱-۱۶- نشان دهید که در یک محیط خطی رسانا می توان پیمانه مناسبی انتخاب کرد به طوری که  $\vec{A}$  و  $\vec{\phi}$  هر دو در معادله موج میرا (۱۶-۲۹) صدق کنند. فرض کنید  $\rho = 0$  است.

حل:

$$\vec{J} = g \vec{E}, \rho = 0$$

$$(معادله موج میرا) \quad \nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - g \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (۱۶-۲۹)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu g \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \mu g (-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$- \nabla^2 \vec{A} = -\mu g \vec{\nabla} \phi - \mu g \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu \epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \mu \phi \right] + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu g \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \mu \phi = 0 \quad (\text{پیمانه مورد نظر})$$

نکته: در یک محیط خطی رسانا با این پیمانه،  $\vec{A}$ ،  $\vec{\phi}$  در معادله موج میرا صادق هستند.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \epsilon \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \phi - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - g \mu \phi$$

بنابراین:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (-\epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - g \mu \phi) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

۱۲-۱۶- محیطی داریم که در آن  $\rho = 0$  و  $J = 0$  و  $\mu = \mu_0$  است ولی بردار قطبش  $P$  به صورت تابعی از مکان و زمان، یعنی  $P = P(x, y, z, t)$  داده شده است. نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری  $Z$  (بردار هرتز) به دست می آیند که  $Z$  در معادله زیر صدق می کند

$$\nabla^2 Z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

$$E = \nabla \times \nabla \times Z - \frac{1}{\epsilon_0} P, B = \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial Z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = +i E_0 \left( \frac{-\lambda}{2\pi C} \right) \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Ct)$$

$$\vec{A} = \frac{-i E_0 \lambda}{2\pi C} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Ct)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-E_0 \lambda}{2\pi C} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Ct) \right) = 0$$

در این شرط، شرط لورنتس که در اینجا همان شرط کولن،  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  است، نیز صادق است.

۱۰-۱۶- نشان دهید در خلاء با  $\rho = 0$  و  $J = 0$ ، معادلات ماکسول به طور صحیحی تنها از یک تابع برداری  $A$  که در معادلات زیر صدق کند، به دست می آیند.

$$\nabla \cdot A = 0 \quad \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

پیمانه ای که در آن  $\nabla \cdot A = 0$  باشد پیمانه کولن نامیده می شود.

حل:

$$\rho = 0, J = 0 \quad (۱)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (۲) \quad (\text{پیمانه کولن})$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (J = 0 \text{ در خلاء با } J = 0) \quad (۳)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, (۲) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (۴)$$

$$\nabla^2 \phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{-\rho}{\epsilon}, (۱), (۴) \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \quad (۵)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

(با توجه به روابط (۲)، (۴)، (۵))

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\epsilon \nabla^2 \phi - \epsilon \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}]$$

$$(۲) - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{A} = \frac{-1}{\mu_0} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

به این دلیل که:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$(۴) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, J = 0 \quad (\text{طبق مسئله})$$



چون دیوژرانس هر کرلی صفر است.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{y}] = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right] = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{y} - \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\times (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{y}) - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{y}) - \nabla^2 \vec{y}] - \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{y}) + \mu_0 \vec{M} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^2} \right] - \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$*: \nabla^2 \vec{y} = -\mu_0 \vec{M} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^2}$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 + \vec{\nabla} \times \vec{M} - \frac{1}{\mu_0 C^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

۱۶-۱۴- نشان دهید که معادلات ماکسول را برای محیطی همسانگرد، همگن، نارسانا و بدون بار به وسیله یکی از دو دسته معادلات زیر می توان برقرار کرد.

۱. قسمت حقیقی  $B = \nabla \times \nabla \times (Fa)$

قسمت حقیقی  $B = \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (Fa)$

یا

۲. قسمت حقیقی  $B = \nabla \times \nabla \times (Fa)$

قسمت حقیقی  $B = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (Fa)$

که در آن  $a$  یک بردار یکه ثابت است و  $F$  در معادله نردهای موج صدق می کند.

حل:

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (F\hat{a}), \vec{B} = \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times (F\hat{a})$$

$$\text{محیط نارسانا: } g = 0 \Rightarrow \vec{J} = g \vec{E} = 0$$

$$\rho = 0: \text{ بدون بار}$$

$$\nabla^2 F - \epsilon \mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad (F \text{ در معادله نردهای موج صادق است})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times (F\hat{a})) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (F\hat{a})) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (F\hat{a})] = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot (F\hat{a})) - \nabla^2 (F\hat{a})] \\ = -\vec{\nabla} \times (\hat{a} \nabla^2 F)$$

$$\rho = 0, J = 0, \mu = \mu_0$$

(بردار قطبش در محیط به صورت تابعی از مکان و زمان)

$$\vec{P} = \vec{P}(x, y, z, t)$$

$$\nabla^2 \vec{z} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}, \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{z} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}, \vec{B} = \frac{1}{C^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{1}{C^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} \right] = \frac{1}{C^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial t}) = 0$$

چون دیوژرانس هر کرلی صفر است.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{z} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0})$$

$$+ \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{z} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}) = \vec{\nabla} \times \left[ (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{z}) - \nabla^2 \vec{z}) - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right] \quad (1)$$

$$* \Rightarrow \nabla^2 \vec{z} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{z}) + \left( \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial t^2} \right) - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right] = -\frac{1}{C^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial t^2}$$

$$= -\frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{C^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} \right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0 C^2} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} \right]$$

$$= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{z}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (J = 0 \text{ طبق مسئله})$$

نکته: معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری  $\vec{z}$  (بردار هرتز) بدست می آیند، که این  $z$  در سه معادله بالا صادق است.

۱۶-۱۳- محیطی داریم که در آن  $\rho = 0$  و  $J = 0$  و  $\epsilon = \epsilon_0$  است ولی بردار مغناطش تابع داده شده ای است  $[M(x, y, z, t)]$ . نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری  $Y$  که در معادله زیر صدق می کند، به دست می آیند

$$\nabla^2 Y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -\mu_0 M$$

$$B = \nabla \times \nabla \times Y, E = -\nabla \times \frac{\partial Y}{\partial t}$$

حل:

$$\rho = 0, J = 0, \epsilon = \epsilon_0$$

(بردار مغناطش تابعی از مکان و زمان است)

$$\vec{M} = \vec{M}(x, y, z) \quad \nabla^2 \vec{y} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{M}^*, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{y}, \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{y}}{\partial t}$$



$$= -\vec{\nabla} \times \left[ \hat{a} \varepsilon \mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right] = -\varepsilon \mu \vec{\nabla} \times \frac{\partial^2 (F \hat{a})}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{\nabla}}{\partial t}$$

$$\times (F \hat{a}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \varepsilon \mu \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\nabla}}{\partial t} \times (F \hat{a})$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (F \hat{a}) = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (F \hat{a}) \quad , \quad \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times (F \hat{a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (F \hat{a})) = 0 \quad (\text{دیورژانس هرکلی صفر است})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times (F \hat{a}) \right) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times (F \hat{a})) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times (F \hat{a}) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (F \hat{a}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (F \hat{a})]$$

$$= \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot (F \hat{a})) - \nabla^2 (F \hat{a})]$$

$F$  در معادله نردهای موج صدق می کند:

$$\nabla^2 F - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 F = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot (F \hat{a})) - \varepsilon \mu \hat{a} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right] = -\varepsilon \vec{\nabla} \times \frac{\partial^2 (F \hat{a})}{\partial t^2}$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times (F \hat{a}) \right) = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

هر پگاه تکرار کن : مسئولیت زندگیم را بر دوش می گیرم ،  
قدرت بهتر کردن همه چیز را در خود دارم . همواره حق انتخاب  
دارم !

یادداشت کن : پشتکار + شکیبایی = هدف

به یاد بسپار : نسبت به همه چیز صبور باش ، اما نسبت به یافتن  
زندگی خود ، بی صبر

یادداشت کن : در این دنیا فقط باید از یک چیز بترسی ، آن هم  
ترس است

یادت باشد : مشکلات را در پاکتی بگذار که ته آن سوراخ باشد  
به خاطر بسپار : می توانی از اشتباهات دیگران بیاموزی ، اما تنها به  
یاری اشتباهات فردی است که رشد می کنی